Что там у вас на семинарах?
А вот что.
Вам дают ОДУ второго порядка
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)dy}{dx}\right) - q(x)y(x) = f(x)$$
и ГУ. Причём если бы дали $u|_{t=0}$ и $\frac{du}{dx}|_{x=0}$, это была бы задача Коши. А вам вместо дают по одному ГУ на каждом из концов. Ну, например,
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$
$$u(0) = u(l) = 0$$
И как такое решать? Есть два способа:

1) Способ нормального человека. Решить дифур, получить решение через две константы С1 и С2, а затем найти их из граничных условий.

Как бы им решали? Просто интегрируем ДУ. Например, если это
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$
то получаем
$$u(x) = \int_0^x dy \int_0^y f(z)\,dz + C_1x + C_2$$
Ну и из гранусловий получаем решение:
$$u(x) = \int_0^x dy \int_0^y f(z)\,dz - x * \int_0^1 dy \int_0^y f(z)\,dz$$

2) Способ ненормального человека – через функцию Грина. Грин – был такой английский математик, сын мельника, но стал математиком.

Функция Грина – это функция Грина двух переменных: G(x,s). Симметричная, т.е. G(s,x).

Итак, что нам предлагает доблестный кафмат?
Решить ***однородный*** дифур, найдя ФСР – y1(s) и y2(s). Причём y1(s) должна удовлетворить левому гранусловию, а y2(s) правому.
Далее найти вронскиниан

$$W(s)=\det\begin{vmatrix} y_2(s) & y_1(s) \\ y_2'(s) & y_1'(s) \end{vmatrix}$$

А затем уже функцию Грина:

$$G(s,x) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)\cdot W(s)}, & 0\le x\le s, \\ \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{p(s)\cdot W(s)}, & s\le x\le l. \end{cases}$$

Напомним, что p(s) мы берём из ДУ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\boldsymbol{p(x)}du}{dx}\right)-q(x)u(x)$$

И затем, используя функцию Грина, находим решение:

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds$$

Уфффф… Зачем так сложно?

Ну, небольшой плюс в том, что нам не пришлось решать неоднородный ДУ. Вместо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=f(x)$$

мы решали

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=0$$

Что иногда оказывается решающим.

Но от чувства, что функция Грина – бесполезное говно, никуда не деться. Ну какой у неё физсмысл?

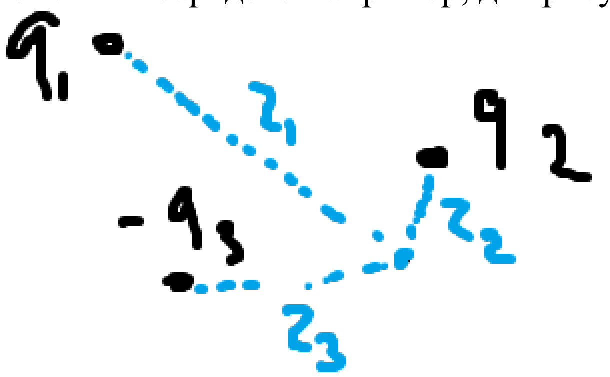
Мы все привыкли, что 2D сложнее 1D, а 3D сложнее 2D. Так вот, с функцией Грина это не так ☺ Там внезапно самым лёгким случаем для понимания оказывается 3D (причём даже не 2D, в 2D сложнее). Разумеется, в курсе дифуров кафмат рассказывает только 1D, в результате чего у второкуров складывается ощущение, что функция Грина бесполезное говно. На самом деле ~~так оно и есть~~ это полезная штука, но полностью она раскрывается как раз в многомерии. Так что я предлагаю читателю совершить путешествие вместе со мной в многомерие ☺

Погнали!

Как выглядит функция Грина в многомерии? Уже не функция двух переменных, а функция двух точек (т.е. 4 переменных в двумерном случае и 6 переменных в трёхмерном). Точки обозначаются большими латинскими буквами, у меня будет G(M,N).

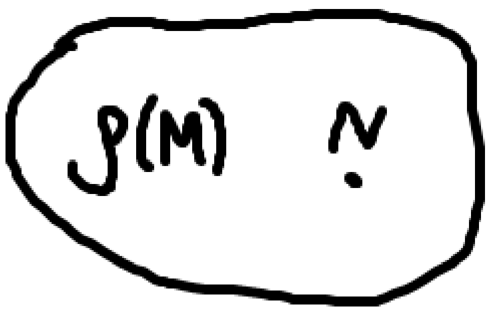
Функция Грина помогает решать уравнение Пуассона
$\Delta\varphi(N)=4\pi\rho(N)$.
Т.е. лапласиан в каждой точке N равен некоей известной функции.

Мы знаем потенциал от точечного заряда – q/r (в СГС). Знаем потенциал системы точечных зарядов. Например, для рисунка




Потенциал в точке наблюдения будет q1/r1+q2/r2-q3/r3.

А что делать, если заряд распределённый, с объёмной плотностью ρ(M), которая в каждой точке M своя




И от нас по-прежнему хотят потенциал в точке наблюдения N?
По сути от нас как раз хотят получить решение уравнения Пуассона
$\Delta u(N)=4\pi\rho(N)$. Что мы делаем? Следите за руками:
Разбиваем область на маленькие кусочки, в пределе их будет бесконечно много. Каждый из них имеет заряд ρ(N)dV(N) (dV(N) – бесконечно малый объём в окрестности N).
Потенциал в точке M от каждого кусочка, содержащего точку N - $\rho(N)dV(N)/R_{MN}$

И далее берём интеграл по всем таким кусочкам:

$$\underset{N}{\underset{\text{в точке}}{\varphi}} = \iiint\limits_V \frac{\rho(M)\, dV(M)}{R_{MN}}$$

Перепишем это как:

$$\varphi(N) = \iiint\limits_V \rho(M)\, G(M,N)\, dV(M)$$

Где $G(M,N)=1/R_{NM}$.

Замечание. Математики ещё дописывают к G константу: $1/(4\pi)$. Это связано с тем, что они решают уравнение $\Delta u(N)=\xi(N)$, а у нас в 3D $\xi(N)=4\pi\rho(N)$. Короче, на $4\pi$ забейте, пониманию они не мешают, просто теоретическая сложность.

Вот это да! Оказалось, что такая привычная функция

$$G(M,N) = \frac{1}{|\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_N}|}$$

оказалась функцией Грина. Какой у неё физический смысл? Вклад в потенциал в точке N от точки M.

Вернёмся из многомерия (оно ещё у вас будет на ММФ, вы им наедитесь досыта) в одномерие и посмотрим на задачу

$$y'' = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad f(x) \in C[0,1],$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

т.е. в принятых выше обозначениях $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, а $L[y] \equiv y''$

Вот мы проделываем все шаги

$$y_1(x): \qquad \begin{cases} y''_1(x)=0, \\ y_1(0)=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1(x)=x,$$

$$y_2(x): \qquad \begin{cases} y''_2(x)=0, \\ y_2(1)=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_2(x)=x-1\,.$$

$$G(x,s)=\frac{1}{p(s)W(s)}\cdot\begin{cases} x(s-1), & 0\le x\le s, \\ (x-1)s, & s\le x\le 1, \end{cases}$$

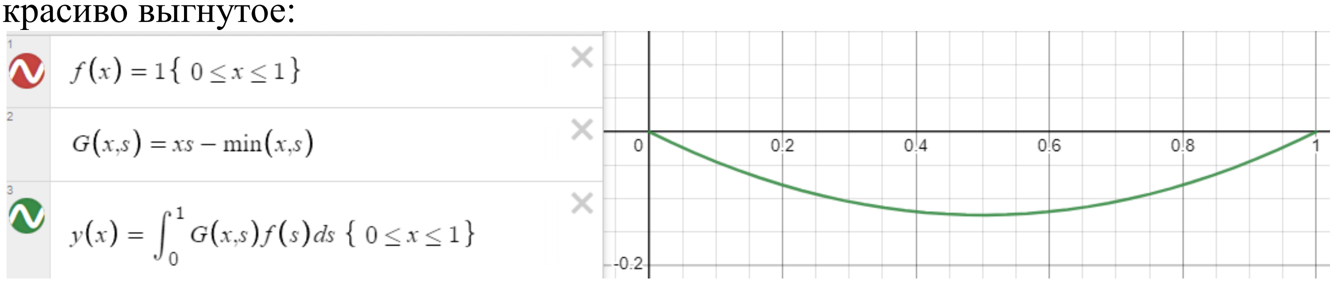
где $W(s)=\det\begin{vmatrix} s & s-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1, \qquad p(x)=1\,.$ Следовательно,

$$G(x,s)=\begin{cases} x(s-1), & 0\le x\le s \\ (x-1)s, & s\le x\le 1 \end{cases}.$$

Теперь решение задачи запишем в виде $y(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)f(s)ds$. Физический смысл полученного решения – профиль струны при статической нагрузке $f(x)$.

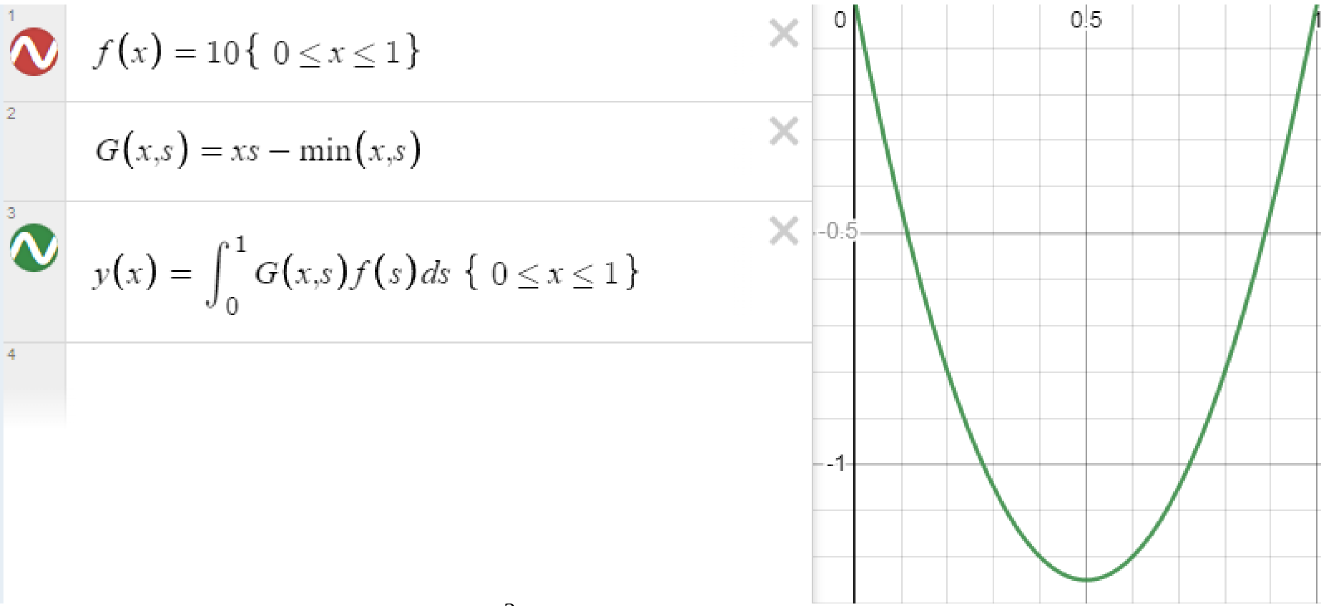
А теперь давайте картинки!

Итак, пускай f(x) однородна. Тогда наша струна y(x) – просто нечто симметрично красиво выгнутое:

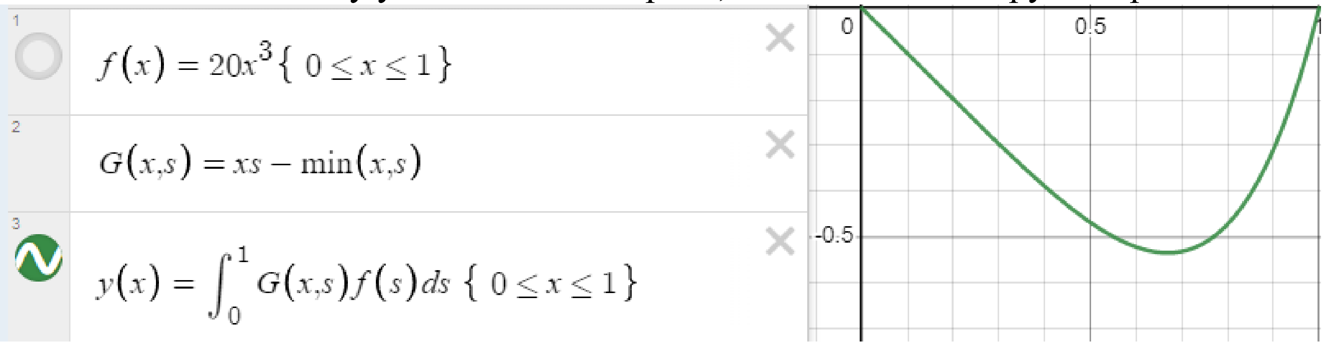



https://www.desmos.com/calculator/i1do7ucqmr

Поставлю f(x) = 10. Посмотрите: струна выгибается сильнее:




Ставлю внешнюю силу уже $20x^3$. И смотрите, как смещается струна вправо:




https://www.desmos.com/calculator/kxsxj2nkcw

А функция Грина, в чём магия, одна и та же. Она определяется лишь геометрией струны – плотностью и толщиной в каждой точке, но не внешней силой.